

Exemplul 1. Vom considera programul neliniar:

$$(P) \begin{cases} (\max) f = x_1 + 2x_2 - x_2^3 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Cercetăm dacă (P) este program convex. Pentru aceasta:

1) aducem (P) la forma canonică de prezentare a programelor neliniare:

$$(P) \begin{cases} (\min) -f = -x_1 - 2x_2 + x_2^3 \\ x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2) Funcția obiectiv $-f$ este convexă în cadranul nenegativ R_+^2 ca sumă a două funcții de câte o singură variabilă, ambele convexe pe $[0, +\infty)$:

$-f = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ unde $f_1(x_1) = -x_1$ este liniară iar $f_2(x_2) = -2x_2 + x_2^3$ are proprietatea $f_2''(x_2) = 6x_2 \geq 0$ pentru $x_2 \geq 0$.

3) Programul are o singură restricție, liniară în variabilele x_1, x_2 .

În concluzie, (P) este un program convex căruia i se poate aplica teorema de optimalitate 6.

Atașăm programului (P) – în formă canonică! – lagrangianul:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, u) = -x_1 - 2x_2 + x_2^3 + u(x_1 + x_2 - 1)$$

Scriem condițiile de optimalitate KKT:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \geq 0 \Leftrightarrow -1 + u \geq 0$	$(1.1) ; \quad x_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow x_1(-1 + u) = 0$	$(1.1')$
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \geq 0 \Leftrightarrow -2 + 3x_2^2 + u \geq 0$	$(1.2) ; \quad x_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2(-2 + 3x_2^2 + u) = 0$	$(1.2')$
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \leq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq 1$	$(2) ; \quad u \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u(x_1 + x_2 - 1) = 0$	$(2')$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$; \quad u \geq 0$	

Dacă tripletul de valori numerice (x_1, x_2, u) satisface condițiile mai sus scrise, putem formula următoarele judecăți:

- Din (1.1) rezultă $u > 0$ și ca urmare (2') implică: $x_1 + x_2 = 1$ (3)
- Dacă am avea $x_2 = 0$, din (3) ar rezulta $x_1 = 1$ și mai departe (1.1') ar implica $u = 1$.

Din (1.2) s-ar obține $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = -1 < 0$. Contradicție! În concluzie $x_2 > 0$.

- Deoarece $x_2 > 0$ din (1.2') deducem $-2 + 3x_2^2 + u = 0$ (4)
- Dacă am avea $x_1 = 0$, din (3) ar rezulta $x_2 = 1$ și din (4) am obține: $u = -1 < 0$ ceea ce nu se poate. În consecință, $x_1 > 0$.
- Întrucât $x_1 > 0$, din (1.1') rezultă $u = 1$. Din (4) găsim $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și din (3) obținem

$$x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Programul (P) are deci soluția optimă: $x_1^* = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, x_2^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Exemplul 2. Ne vom ocupa acum de programul:

$$(P) \begin{cases} (\max) f = x_1 + 2x_2 \\ x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \leq 21 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forma canonică de prezentare:

$$(P) \begin{cases} (\min) -f = -x_1 - 2x_2 \\ x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 21 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Programul (P) este un program convex deoarece:

Funcția obiectiv este liniară în variabilele x_1, x_2 ;

Funcția patratică $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ care definește unica restricție a programului este o funcție convexă – chiar strict convexă! – pe $\mathbb{R}^2$. Într-adevăr, g are expresia matricială

$$g(x_1, x_2) = x^T C x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

în care matricea simetrică $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ este pozitiv definită (este bine ca cititorul să revadă notele privitoare la convexitatea funcțiilor patratice din secțiunea 14.1)

Lagrangianul programului: $\mathcal{L}(x_1, x_2, u) = -x_1 - 2x_2 + u(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 21)$

Condițiile de optimalitate KKT:

	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \geq 0 \Leftrightarrow -1 + 2ux_1 - ux_2 \geq 0$	(1.1)	;	$x_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow x_1(-1 + 2ux_1 - ux_2) = 0$	(1.1')
(KKT)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \geq 0 \Leftrightarrow -2 - ux_1 + 2ux_2 \geq 0$	(1.2)	;	$x_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2(-2 - ux_1 + 2ux_2) = 0$	(1.2')
	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \leq 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \leq 21$	(2)	;	$u \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 21) = 0$	(2')
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$		;	$u \geq 0$	

Dacă tripletul de valori numerice (x_1, x_2, u) satisface condițiile mai sus scrise, putem dezvolta următoarele raționamente:

- Din (1.1) sau (1.2) rezultă că nu putem avea $u = 0$. Prin urmare $u > 0$.
- Deoarece $u > 0$ din (2') rezultă: $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 21$ (3)
- Nu putem avea $x_1 = 0$, pentru că dacă ar fi așa, am avea $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -1 - ux_2 < 0$ în

contradicție cu (1.1). Deci $x_1 > 0$ și ca urmare, (1.1') implică: $-1 + 2ux_1 - ux_2 = 0$ (4)

- Analog, din (1.2) rezultă $x_2 > 0$ iar din (1.2') obținem: $-2 - ux_1 + 2ux_2 = 0$ (5)

- Evident, relațiile (3),(4),(5) constituie un sistem în variabilele x_1, x_2 și u . Din (4) și (5)

extragem: $x_1 = \frac{4}{3u}, x_2 = \frac{5}{3u}$. Înlocuind în (4) găsim $u = \frac{1}{3}$ și de aici $x_1 = 4, x_2 = 5$

Programul (P) are soluția optimă $x_1^* = 4, x_2^* = 5$

Exemplul 3. Uneori, se întâmplă să cunoaștem „poziția aproximativă” a soluției optime a unui program convex în sensul că știm care restricții sau condiții de nenegativitate sunt verificate cu egalitate și care nu. În asemenea situații, condițiile KKT sunt suficiente pentru determinarea „exactă” a soluției optime căutate.

Vom lua ca exemplu programul neliniar:

$$(P) \begin{cases} (\max) f = 2x_1 + x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

pentru care vom „încerca” o rezolvare grafică în figura 14.8. (P) este un program convex, deoarece mulțimea $\mathcal{A}$ a soluțiilor sale admisibile este convexă și funcția obiectiv este liniară. În figură este reprezentată punctat și o dreaptă de nivel a funcției obiectiv f a cărei translații, în sensul maximizării lui f , conduce la soluția optimă x^* a programului. Din desen rezultă că x^* are următoarele proprietăți:

- satisface cu egalitate restricția neliniară $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ și cu inegalitate strictă restricția liniară $x_1 + 2x_2 \leq 2$;
- coordonatele sale sunt nenule.

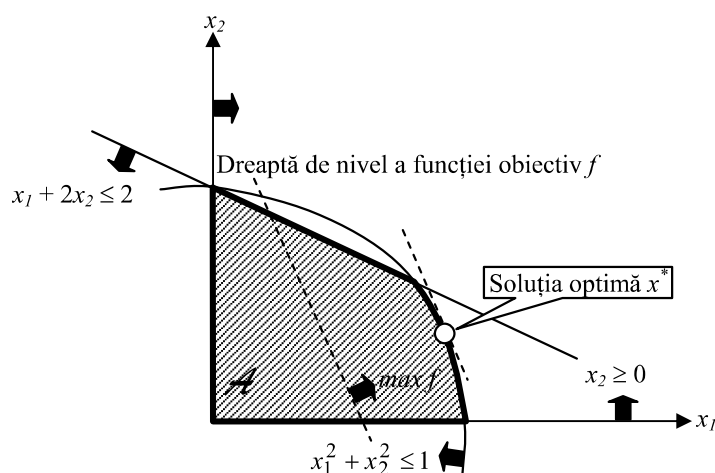


Figura 14.8

Pentru determinarea „precisă” a lui x^* vom folosi condițiile de optimalitate KKT: teoria ne asigură că x^* le satisface!

Forma canonică de prezentare a programului neliniar (P):

$$(P) \begin{cases} (\min) & -f = -2x_1 - x_2 \\ & x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ & x_1 + 2x_2 - 2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Lagrangianul asociat:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, u) = -2x_1 - x_2 + u_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + u_2(x_1 + 2x_2 - 2)$$

Condițiile de optimalitate Karush – Kuhn – Tucker:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \geq 0 \Leftrightarrow -2 + 2u_1x_1 + u_2 \geq 0$	(1.1)	;	$x_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow x_1(-2 + 2u_1x_1 + u_2) = 0$	(1.1')
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \geq 0 \Leftrightarrow -1 + 2u_1x_2 + 2u_2 \geq 0$	(1.2)	;	$x_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2(-1 + 2u_1x_2 + 2u_2) = 0$	(1.2')
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} \leq 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq 1$	(2.1)	;	$u_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = 0 \Leftrightarrow u_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$	(2.1')
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} \leq 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 \leq 2$	(2.2)	;	$u_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} = 0 \Leftrightarrow u_2(x_1 + 2x_2 - 2) = 0$	(2.2')
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$		;	$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$	

Din studiul grafic rezultă că soluția optimă a programului (P) satisface:

- egalitatea $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (3)

- inegalitățile stricte $x_1 > 0, x_2 > 0$ și $x_1 + 2x_2 > 2$

Din (1.1'), (1.2') și (2.2') rezultă egalitățile:

$-2 + 2u_1x_1 + u_2 = 0$ (4)

$-1 + 2u_1x_2 + 2u_2 = 0$ (5)

$u_2 = 0$ (6)

Relațiile (3) – (6) constituie un sistem în variabilele x_1, x_2, u_1, u_2 din a cărui rezolvare rezultă soluția

optimă $x_1^* = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $x_2^* = \frac{1}{\sqrt{5}}$ și valorile optime ale multiplicatorilor Lagrange $u_1^* = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $u_2^* = 0$

În teoria economică, condițiile KKT permit degajarea unor concluzii calitative importante și chiar regăsirea unor legități binecunoscute.

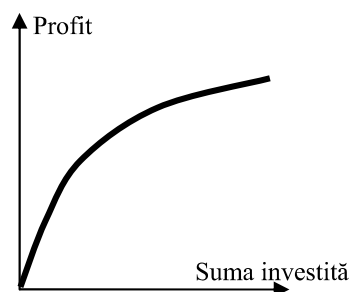


Figura 14.9

Exemplul 4 Un agent economic dorește să investească o sumă de bani în două afaceri independente, ambele profitabile, obiectivul urmărit fiind maximizarea profitului. Se presupune că profitul ca funcție de suma investită are alura din figura 14.9 adică este o funcție crescătoare și concavă. **Teoria economică clasică afirmă și probează că suma trebuie astfel împărțită încât profiturile marginale corespunzătoare să fie egale** (în cazul de față profitul marginal corespunzător unei sume investite este profitul suplimentar care s-ar obține dacă suma crește cu o unitate monetară).

Problema pusă are următorul model matematic:

$$(P) \begin{cases} (\max) f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) \\ x_1 + x_2 \leq I \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

în care;

$x_1, x_2 \equiv$ sumele investite în cele două activități economice;

$I \equiv$ suma totală de investit;

$f_i(x_i) \equiv$ profitul rezultat din investirea sumei x_i în activitatea i , $i = 1, 2$

$f(x_1, x_2) \equiv$ profitul total (egal cu suma profiturilor individuale deoarece activitățile sunt presupuse a fi independente)

Funcția obiectiv f este concavă în cadranul nenegativ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ca sumă a două funcții de câte o singură variabilă, concave pe $[0, +\infty)$. Unica restricție din (P) este liniară astfel că (P) este un program convex.

Lagrangianul asociat formei canonice de prezentare a programului (P) are expresia:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, u) = -f_1(x_1) - f_2(x_2) + u(x_1 + x_2 - I)$$

Vom scrie condițiile de optimalitate KKT:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \geq 0 \Leftrightarrow -f'_1(x_1) + u \geq 0 \quad (1.1) ; \quad x_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow x_1(-f'_1(x_1) + u) = 0 \quad (1.1')$$

$$(KKT) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \geq 0 \Leftrightarrow -f'_2(x_2) + u \geq 0 \quad (1.2) ; \quad x_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2(-f'_2(x_2) + u) = 0 \quad (1.2')$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \leq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq I \quad (2) ; \quad u \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u(x_1 + x_2 - I) = 0 \quad (2')$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad ; \quad u \geq 0$$

Agentul dorește să investească în ambele activități și ca urmare $x_1 > 0, x_2 > 0$. Profiturile marginale $f'_1(x_1)$ și $f'_2(x_2)$ sunt pozitive astfel că din (1.1) sau (1.2) rezultă $u > 0$. Atunci (2') implică $x_1 + x_2 = I$ iar din (1.1') și (1.2') obținem $f'_1(x_1) = f'_2(x_2) = u$. Regăsim concluzia mai sus subliniată!

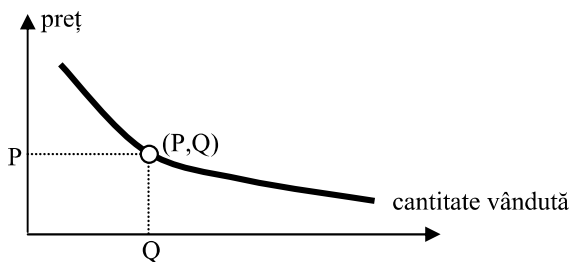


Figura 14.10

Exemplul 5. Să notăm cu Q cantitatea dintr-un anumit bun cerută și vândută pe piață la prețul P . Cuplul (Q, P) este un punct pe curba cererii bunului considerat, curbă a cărei alură esre vizualizată în figura 14.10 Vom putea presupune că Q este o funcție de P sau că P este o funcție de Q după necesități. Reamintim că **elasticitatea cererii** pentru bunul considerat s-a definit prin raportul.

$$E = - \frac{\text{modificarea procentuală a cantității cerute}}{\text{modificarea procentuală a prețului}} = - \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dP}{P}} = - \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$$

Cererea se numește **elastică** dacă $E > 1$ și **inelastică** dacă $E < 1$. Vom demonstra următoarea:

Lemă O cerere inelastică implică un venit marginal negativ.

Reamintim că **venitul marginal reprezintă creșterea de venit (pozitivă sau negativă) rezultată din creșterea cantității vândute cu o unitate**. Formal, dacă $R = P \cdot Q$ este venitul (revenue) obținut din vânzarea cantității Q la prețul P atunci venitul marginal (marginal revenue) MR este dat de derivata lui R în raport cu Q :

$$MR = \frac{d(P \cdot Q)}{dQ}$$

Demonstrația lemei: Avem succesiv:

$$MR = \frac{P \cdot dQ + Q \cdot dP}{dQ} = P + Q \cdot \frac{dP}{dQ} = P \cdot \left(1 + \frac{Q}{P} \cdot \frac{dP}{dQ} \right) = P \cdot \left(1 - \frac{1}{E} \right)$$

de unde se vede că $E < 1 \Rightarrow MR < 0$

Să considerăm o întreprindere care produce două bunuri notate 1 și 2. Fie Q_1 și Q_2 cantitățile vândute pe piață la prețurile $P_1(Q_1)$ respectiv $P_2(Q_2)$. Fie $C(Q_1, Q_2)$ costul producerii celor două cantități. De obicei, în analiza economică se presupune că funcția $C(Q_1, Q_2)$ este crescătoare în ambele argumente și convexă în domeniul $Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0$.

Propoziție Dacă întreprinderea urmărește maximizarea profitului său și unul dintre bunuri are cererea inelastică, ea nu trebuie să producă bunul respectiv sau, dacă situația o cere, să producă atât cât îi este impus.

Demonstrație: Problema constă în maximizarea profitului:

$$\Pi = P_1 \cdot Q_1 + P_2 \cdot Q_2 - C(Q_1, Q_2)$$

cu condiția producerii cantităților minimale:

$$Q_1 \geq m_1 > 0 \quad Q_2 \geq m_2 > 0$$

Rescriem problema în forma canonică:

$$\begin{cases} (\min) & -\Pi = -P_1 \cdot Q_1 - P_2 \cdot Q_2 + C(Q_1, Q_2) \\ & m_1 - Q_1 \leq 0 \\ & m_2 - Q_2 \leq 0 \\ & Q_1, Q_2 \geq 0 \end{cases}$$

și atașăm lagrangianul:

$$\mathcal{L}(Q_1, Q_2; u_1, u_2) = -P_1 \cdot Q_1 - P_2 \cdot Q_2 + C(Q_1, Q_2) + u_1(m_1 - Q_1) + u_2(m_2 - Q_2)$$

Programul este convex și ca urmare condițiile KKT sunt aplicabile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} \geq 0, \quad Q_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} = 0 & \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_2} \geq 0, \quad Q_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} \leq 0, \quad u_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = 0 & \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} \leq 0, \quad u_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} = 0 \\ Q_1, Q_2 \geq 0 & \quad u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Să presupunem că bunul 1, produs în cantitatea Q_1 are cerea inelastică. Dintre condițiile KKT de mai sus considerăm numai pe acelea care se referă la variabila Q_1 .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} \geq 0 \Rightarrow -\frac{\partial(P_1 \cdot Q_1)}{\partial Q_1} + \frac{\partial C}{\partial Q_1} - u_1 \geq 0 \Rightarrow -MR_1 + MC_1 - u_1 \geq 0 \quad (1)$$

unde

$$MR_1 = \frac{\partial(P_1 \cdot Q_1)}{\partial Q_1} \equiv \text{venitul marginal rezultat din vânzarea bunului 1};$$

$$MC_1 = \frac{\partial C}{\partial Q_1} \equiv \text{costul marginal al producerii bunului 1}.$$

$$Q_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} = 0 \Rightarrow Q_1 \cdot (-MR_1 + MC_1 - u_1) = 0 \quad (1')$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} \leq 0 \Rightarrow m_1 - Q_1 \leq 0 \quad (2)$$

$$u_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow u_1(m_1 - Q_1) = 0 \quad (2')$$

Deoarece la optim $Q_1 \geq m_1 > 0$ din (1') rezultă:

$$-MR_1 + MC_1 - u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = MC_1 - MR_1$$

Produsul 1 are cererea inelastică și conform lemei $MR_1 < 0$. Cum $MC_1 > 0$ urmează că la optim $u_1 > 0$. Atunci din (2') rezultă $Q_1 = m_1$. Deci, din bunul 1 cu cererea inelastică nu se produce mai mult decât cantitatea minimă impusă.